Argomento 14
Numeri Complessi

È ben noto che l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali (che include tutti gli altri insiemi numerici finora incontrati in questo corso) non è sufficientemente "ampio" da permettere la risoluzione di equazioni, anche semplici, a coefficienti reali, come ad esempio $x^2 + 1 = 0$. Per risolvere questo problema costruiamo l'insieme dei numeri complessi.

Numeri complessi. Loro rappresentazione geometrica.

L'equazione $x^2 + 1 = 0$ ha soluzione in un certo insieme numerico solo se esso contiene un numero il cui quadrato vale -1. Chiamiamo questo "numero" **unità immaginaria** e lo denotiamo con i. Per definizione si ha quindi

$$i^2 = -1.$$

A partire dall'unità immaginaria si costruiscono i numeri complessi nel modo seguente.

Definizione 14.1 Si dice **numero complesso** ogni scrittura della forma $a + ib$, con a, b numeri reali e i unità immaginaria. L'insieme dei numeri complessi si denota con $\mathbb{C}$ e si ha:

$$\mathbb{C} = \left\{ a + ib \quad \text{tali che} \quad a, b \in \mathbb{R} \ \text{ e } \ i^2 = -1 \right\}.$$

Di solito, i numeri complessi si indicano con le ultime lettere dell'alfabeto: z, w, ...
Dato il numero complesso $z = a + ib$, i numeri reali a e b si dicono rispettivamente **parte reale** e **parte immaginaria** di z e si scrive: $a = \mathrm{Re}(z)$, $b = \mathrm{Im}(z)$.

Esempi 14.2

- $z = 1 - 2i$ è un numero complesso con parte reale 1 e parte immaginaria -2.
- $z = -\sqrt{2} + 0i = -\sqrt{2}$ è un numero complesso con parte reale $-\sqrt{2}$ e parte immaginaria 0.
- $z = 0 + 4i = 4i$ è un numero complesso con parte reale 0 e parte immaginaria 4.

Due numeri complessi $z = a + ib$ e $w = c + id$ si dicono **uguali** se hanno la stessa parte reale e la stessa parte immaginaria:

$$z = w \qquad \Longleftrightarrow \qquad a = c \quad \text{e} \quad b = d.$$

Nell'insieme $\mathbb{C}$ dei numeri complessi si definiscono inoltre le seguenti operazioni**:**

▶ **Somma di due numeri complessi** $z = a + ib$ **e** $w = c + id$ è il numero complesso

$$z + w = (a + c) + i\,(b + d)\,;$$

▶ **Prodotto di due numeri complessi** $z = a + ib$ **e** $w = c + id$ è il numero complesso

$$z \cdot w = (ac - bd) + i\,(ad + bc)\,.$$

Esempio 14.3 Dati $z = 2 + i$ e $w = -1 + 3i$, calcoliamo $z + w$ e $z \cdot w$.

- $(2 + i) + (-1 + 3i) = 1 + 4i$
- $(2 + i) \cdot (-1 + 3i) = -2 + 3i^2 - i + 6i = -2 - 3 + 5i = -5 + 5i$

Osserviamo che le due operazioni si eseguono usando le ordinarie regole del calcolo letterale e ricordando che $i^2 = -1$.

Per la somma e il prodotto appena definiti valgono le usuali proprietà delle operazioni (commutativa, associativa, distributiva). Inoltre:

- il numero complesso $0 = 0 + i0$ è tale che $z + 0 = z$ per ogni z;
- il numero complesso $1 = 1 + i0$ è tale che $z \cdot 1 = z$ per ogni z;
- il numero complesso $-z = -a - ib$ è l'**opposto** di $z = a + ib$;
- se $z \neq 0$, il numero complesso

$$\frac{1}{z} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i \cdot \frac{b}{a^2 + b^2}$$

è il **reciproco** di $z = a + ib$. (Ovviamente si ha $z \cdot \dfrac{1}{z} = 1$ per ogni $z \neq 0$.)

Esempio 14.4 Dati $z = 2 + i$ e $w = 1 + 3i$, calcoliamo: $-w$; $\dfrac{1}{w}$; $\dfrac{z}{w}$.

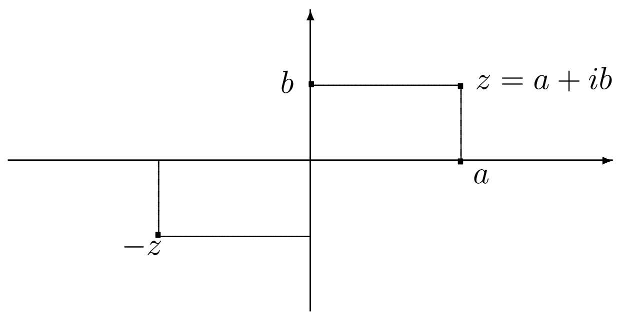
- $-w = -1 - 3i$
- $\dfrac{1}{w} = \dfrac{1}{10} - \dfrac{3}{10}i$;
- $\dfrac{z}{w} = (2 + i)\left(\dfrac{1}{10} - \dfrac{3}{10}i\right) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i.$

È noto che numeri reali sono in corrispondenza biunivoca con i punti della retta euclidea.
Analogamente, associando al numero della forma $z = a + ib$ il punto di coordinate (a, b), si realizza una corrispondenza biunivoca tra i numeri complessi e i punti del piano cartesiano (detto in questo contesto **piano di Argand–Gauss**).
In tale corrispondenza: $a = \mathrm{Re}(z)$ è l'ascissa di (a, b) e $b = \mathrm{Im}(z)$ è l'ordinata di (a, b).

I numeri della forma $a + 0i$, (che sono di fatto numeri reali) corrispondono ai punti dell'asse delle ascisse che verrà perciò detto **asse reale,** evidenziando che si ha $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

I numeri della forma $0 + ib = ib$, (detti **immaginari puri**) corrispondono ai punti dell'asse delle ordinate che verrà perciò detto **asse immaginario.**

L'opposto di z, ossia il numero $-z = -a - ib$ corrisponde al punto $(-a, -b)$ simmetrico di (a, b) rispetto all'origine.



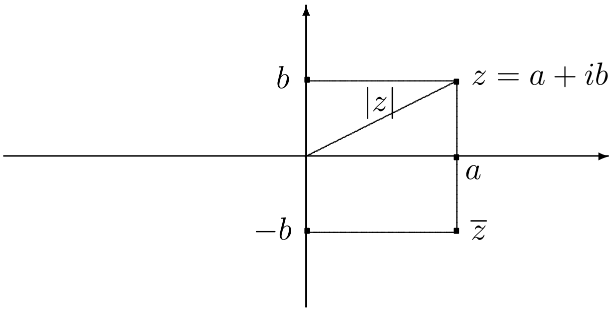
Definizione 14.5 Dato il numero $z = a + ib$ si chiama
▶ **Coniugato** di z il numero complesso

$$\overline{z} = a - ib.$$

Esso corrisponde al punto $(a, -b)$ simmetrico di (a, b) rispetto all'asse reale.
▶ **Modulo** di z il numero

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

che rappresenta la distanza del punto (a, b) dall'origine ed è quindi un numero reale maggiore o uguale a zero.



Osserviamo che [1]

$$z \cdot \overline{z} = |z|^2$$

e inoltre

$$z + \overline{z} = (a + ib) + (a - ib) = 2a = 2\,\mathrm{Re}(z); \qquad z - \overline{z} = (a + ib) - (a - ib) = 2ib = 2i\,\mathrm{Im}(z).$$

Esempio 14.6 Dati $z = 2 - i$ e $w = 2 + 3i$, calcoliamo $\dfrac{\overline{z}}{w}$. Si ha:

$$\frac{\overline{z}}{w} = \frac{2 + i}{2 + 3i} = \frac{(2 + i)\,(2 - 3i)}{(2 + 3i)\,(2 - 3i)} = \frac{7}{13} - \frac{4}{13}i.$$

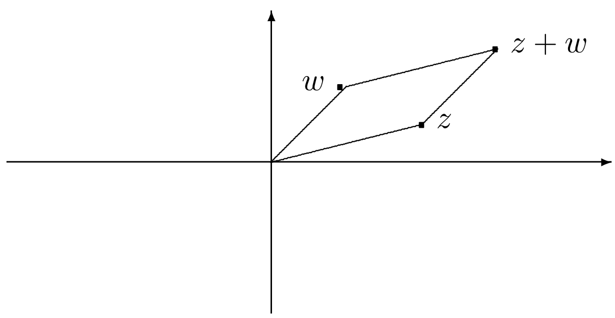
È facile vedere che la somma di due numeri complessi $z = a + ib$ e $w = c + id$, cioè il numero $(a + c) + i(b + d)$ corrisponde al punto che si ottiene con la "regola del parallelogramma" dai punti di coordinate (a, b) e (c, d).

[1] La relazione che esprime il reciproco di un numero complesso non nullo si può anche esprimere mediante la formula:

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}.$$

Inoltre, per calcolare il rapporto di due numeri complessi può essere utile tenere presente che

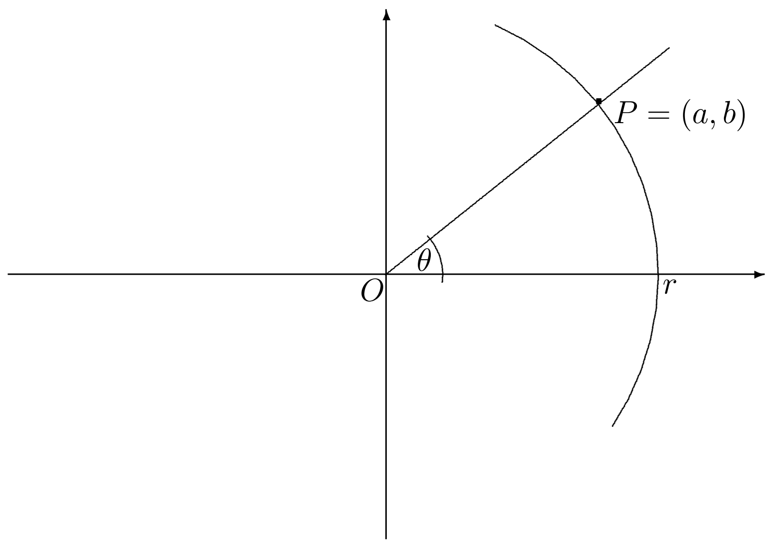
$$\frac{z}{w} = \frac{z \cdot \overline{w}}{|w|^2}.$$



Non è altrettanto facile dare l'interpretazione geometrica del prodotto. Anche a questo scopo può essere utile introdurre la forma trigonometrica dei numeri complessi.

Forma trigonometrica dei numeri complessi

Osserviamo che ogni punto $P = (a, b)$, diverso dall'origine, nel piano di Argand–Gauss può essere individuato anche assegnando la sua distanza r dall'origine O e l'angolo θ compreso tra il semiasse positivo delle ascisse e la semiretta OP.



Per definizione di coseno e seno (vedi MiniMat Lezione7) si ha:

$$a = r\cos\theta; \qquad b = r\sin\theta. \tag{1}$$

Si ottiene quindi: $z = a + ib = (r\cos\theta) + i\,(r\sin\theta)$.

Definizione 14.7

$$r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

si chiama **forma trigonometrica** del numero complesso $z = a + ib$.
Per distinguere le due rappresentazioni, la scrittura $a + ib$ si chiama **forma algebrica** del numero complesso z.

Osserviamo che il numero reale positivo r è il **modulo** di z.

Inoltre, poiché le funzioni sin e cos sono periodiche di periodo 2π, nelle formule (1) nulla cambia se a θ si sostituisce $\theta+2k\pi$: uno qualunque di questi numeri si dice **argomento** di z. Quindi l'argomento è definito a meno di multipli interi di 2π [2].
Assegnare un numero complesso in forma trigonometrica significa evidenziarne il modulo e un argomento.
Dunque, *due numeri complessi* (espressi *in forma trigonometrica*) *sono uguali* se e solo se hanno moduli uguali e argomenti uguali, a meno di un multiplo intero qualsiasi di 2π.
Notiamo che *numeri complessi con ugual modulo* stanno sulla stessa circonferenza con centro nell'origine O del piano di Argand-Gauss, mentre *numeri complessi con argomento uguale* (a meno di multipli interi di 2π) stanno sulla stessa semiretta avente origine in O.

Dato un numero complesso in forma trigonometrica (ossia noti r e θ), la sua forma algebrica si ricava mediante le formule (1); viceversa dato un numero complesso in forma algebrica si ricavano r e θ osservando che:

$$r = |z| = \sqrt{a^2+b^2} \qquad \cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \qquad \sin\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Per convenzione, al numero complesso zero si attribuisce modulo zero e argomento qualsiasi.

Esempio 14.8 Determiniamo il modulo ed un argomento dei seguenti numeri complessi: -2; $5i$; $1+i$; $-\sqrt{3}+i$.
- -2 è un numero reale negativo e quindi ha argomento π; inoltre il suo modulo è 2.
- $5i$ è un numero immaginario puro (sul semiasse positivo) e quindi ha argomento $\frac{\pi}{2}$; inoltre il suo modulo è 5.
- $|1+i| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$; inoltre $\cos\theta = \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ e quindi un argomento di $1+i$ è $\frac{\pi}{4}$.
- $\left|-\sqrt{3}+i\right| = \sqrt{3+1} = 2$; inoltre $\cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\sin\theta = \frac{1}{2}$: quindi un argomento di $-\sqrt{3}+i$ è $\frac{5\pi}{6}$.

La forma trigonometrica permette di calcolare più agevolmente il prodotto di numeri complessi e di capire il significato geometrico del prodotto.
Dati $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ e $w = \rho\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ si ha

$$r(\cos\theta + i\sin\theta)\cdot\rho\,(\cos\varphi + i\sin\varphi) = r\rho[(\cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi) + i(\sin\theta\cos\varphi + \cos\theta\sin\varphi)]$$

e quindi

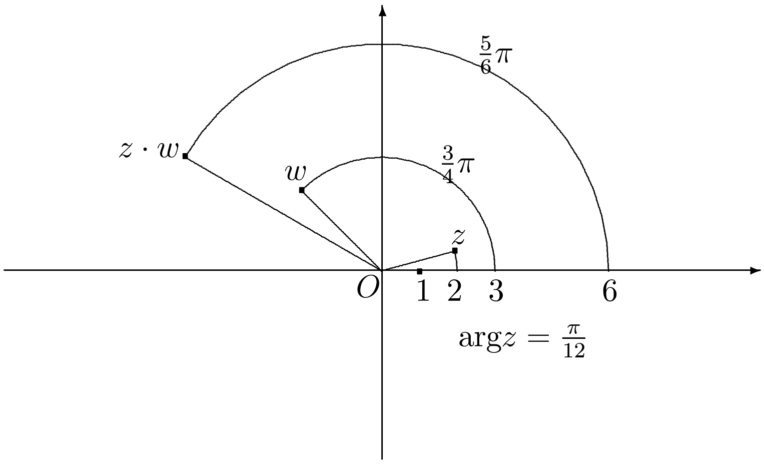
$$\boxed{z\cdot w = r\rho[\cos(\theta+\varphi) + i\sin(\theta+\varphi)]}$$

Il risultato mostra che il modulo del prodotto è dato dal prodotto dei moduli: $r\rho$, e un argomento del prodotto è la somma degli argomenti: $(\theta+\varphi)$.

Esempio 14.9 Il prodotto di $z = 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right]$ e $w = 3\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right]$ vale

$$z\cdot w = 6\left[\cos\left(\frac{\pi}{12}+\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}+\frac{3\pi}{4}\right)\right] = 6\left[\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right] = -3\sqrt{3}+3i.$$

[2] Tra questi, si usa indicare l'argomento appartenente all'intervallo $(-\pi,\pi]$ con il nome di argomento principale.



Osservazione 14.10 Per comprendere il significato geometrico del prodotto cominciamo da due semplici esempi.

• Il prodotto di z con un numero w di modulo uno ha lo stesso modulo di z. Quindi *la moltiplicazione per* un numero w *di modulo uno equivale ad una rotazione di angolo pari all'argomento di* w. Ad esempio, il numero iz è il ruotato (in senso antiorario) di z di $\pi/2$.

• Il prodotto di z con un numero w reale positivo (e quindi di argomento zero) ha lo stesso argomento di z. Quindi *la moltiplicazione per* un numero w *di argomento zero equivale ad una omotetia* (dilatazione o contrazione) *con fattore uguale a* w. Ad esempio il numero $3z$ si trova sulla stessa semiretta uscente dall'origine di z ad una distanza dall'origine pari a 3 volte quella di z.

• In generale, moltiplicare il numero z per il numero w equivale a ruotare z di un angolo pari all'argomento di w e contemporaneamente dilatare o contrarre z di un fattore uguale al modulo di w. Quindi la moltiplicazione equivale ad una roto–omotetia.

Con ragionamenti analoghi si dimostra che il quoziente di due numeri complessi ha come modulo il quoziente dei moduli, e come argomento la differenza degli argomenti. Ossia se $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ e $w = \rho\,(\cos\varphi + i\sin\varphi) \neq 0$, allora si ha

$$\frac{z}{w} = \frac{r}{\rho}\left[\cos(\theta - \varphi) + i\sin(\theta - \varphi)\right].$$

Potenze e radici $n-$esime di un numero complesso.

Applicando ripetutamente la regola del prodotto si ottiene la:

Regola di De Moivre La potenza $n-$esima del numero complesso $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ ha modulo uguale alla potenza $n-$esima del modulo di z e argomento pari all'argomento di z moltiplicato per n. Dunque

$$\boxed{z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)}$$

Esempio 14.11 Calcoliamo in forma algebrica $(-1+i)^{13}$.
Poiché $-1+i = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right]$ si ha: $(-1+i)^{13} = \left(\sqrt{2}\right)^{13}\left[\cos\left(\frac{39\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{39\pi}{4}\right)\right]$.
Tenendo conto che $\frac{39\pi}{4} = 10\pi - \frac{\pi}{4}$, possiamo scrivere

$$(-1+i)^{13} = 64\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right] = 64 - 64i.$$

Le considerazioni precedenti ci permettono di affrontare il problema di trovare le radici $n-$esime di un numero complesso z cioè di trovare eventuali numeri w tali che $w^n = z$.

Teorema 14.12 (Radici $n-$esime di un numero complesso) Ogni numero complesso non nullo $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ ha esattamente n radici $n-$esime complesse: $w_0, w_1, \ldots, w_{n-1}$. Se $w_k = \rho_k(\cos\theta_k + i\sin\theta_k)$ si ha

$$\boxed{\begin{array}{ll} \rho_k = \sqrt[n]{r} & k = 0, 1, \ldots, n-1 \\ \theta_k = \dfrac{\varphi + 2k\pi}{n} & k = 0, 1, \ldots, n-1 \end{array}}$$

Dunque nel piano di Argand-Gauss le radici $n-$esime di un numero complesso z si trovano ai vertici di un poligono regolare di n lati inscritto in una circonferenza centrata nell'origine e di raggio uguale alla radice $n-$esima (aritmetica) del modulo di z.

Dimostrazione. Se $w = \rho\,(\cos\theta + i\sin\theta)$ è una radice $n-$esima di z deve essere:

$$\rho^n\,(\cos n\theta + i\sin n\theta) = r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

In questa equazione r e φ sono noti, mentre ρ e θ sono le incognite. Per risolvere l'equazione applichiamo il seguente principio: due numeri complessi sono uguali se e solo se hanno moduli uguali e argomenti uguali a meno di un multiplo intero qualsiasi k di 2π. Dunque:

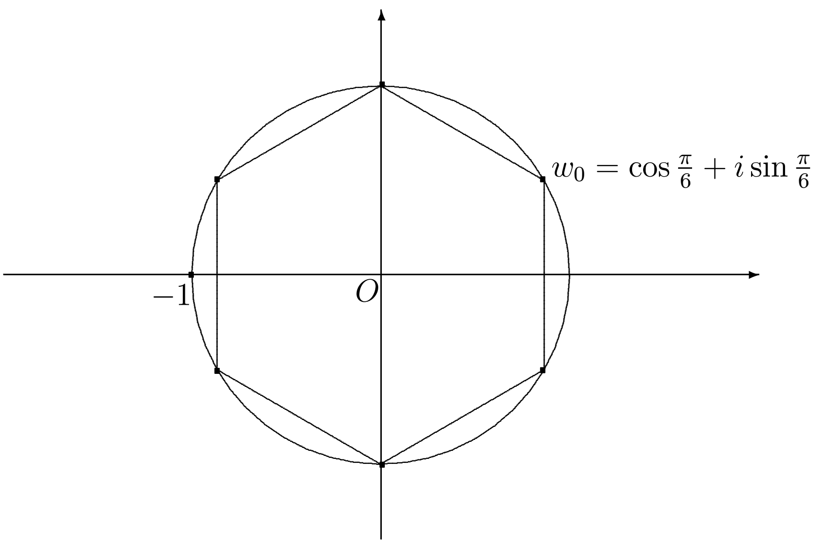
$$\begin{array}{llll} & \rho^n = r & \Rightarrow & \rho = \sqrt[n]{r} \quad \text{(radice aritmetica di un numero reale positivo!)} \\ \text{e} & & & \\ & n\theta = \varphi + 2\pi & \Rightarrow & \theta = \frac{\varphi}{n} + k\frac{2\pi}{n} \quad k \in \mathbb{Z} \end{array}$$

È quindi univocamente determinato il modulo ρ, mentre l'argomento può avere diversi valori (che danno luogo a diverse radici) che si ottengono come segue. Un primo valore è dato da $\frac{\varphi}{n}$. Gli altri valori si ottengono aggiungendo ad esso multipli successivi di $\frac{2\pi}{n}$. È chiaro che dopo n passi si ottiene $\frac{\varphi}{n} + 2\pi$ e quindi si torna alla prima radice.

Esempio 14.13 Calcoliamo le radici seste di -1. Tale numero ha argomento π e modulo ovviamente uguale a 1:

$$-1 = 1(\cos\pi + i\sin\pi) = 1(-1 + i0).$$

Le radici seste hanno tutte modulo uguale a 1 perché la radice sesta aritmetica di 1 è 1. L'argomento della prima radice è $\dfrac{\pi}{6}$; gli argomenti delle successive radici si otterranno aggiungendo via via $\dfrac{2\pi}{6} = \dfrac{\pi}{3}$ all'argomento della prima.



Quindi si ha:

$$
\begin{aligned}
w_0 &= \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \\
w_1 &= \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i \\
w_2 &= \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\right) = \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \\
w_3 &= \cos\left(\frac{\pi}{6} + \pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} + \pi\right) = \cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \\
w_4 &= \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3}\right) = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = -i \\
w_5 &= \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{5\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{5\pi}{3}\right) = \cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i
\end{aligned}
$$

Osserviamo che nessuna delle sei radici sta sull'asse reale, come c'era da aspettarsi dal momento che sono le radici di indice pari (6) di un numero negativo (-1). Notiamo inoltre che, avendo già rappresentato le sei radici nel piano di Argand-Gauss, dopo aver trovato la prima radice si sarebbe potuta trovare la forma algebrica delle altre con semplici considerazioni geometriche.

Esempio 14.14 È facile convincersi che le radici seste (complesse) di 1 si trovano nei vertici di un esagono regolare ottenuto ruotando il precedente di $-\dfrac{\pi}{6}$ in modo che la prima radice w_0 si trovi sull'asse reale nel punto 1 (e la quarta nel punto -1).

Abbiamo appena risolto le equazioni $w^6 \pm 1 = 0$, trovando in entrambi i casi sei soluzioni. Questo è un caso particolare dell'equazione $w^n - z = 0$ che, se $z \neq 0$, ha esattamente n soluzioni distinte nel campo complesso. Più in generale vale il

Teorema fondamentale dell'algebra Ogni polinomio (a coefficienti complessi) di grado n ha nel campo complesso, esattamente n radici (pur di contarle con la loro molteplicità).

Da questo teorema si deduce che:

- Ogni polinomio *a coefficienti complessi* di grado n si può scrivere come prodotto di n polinomi *a coefficienti complessi* di primo grado.
- Ogni polinomio *a coefficienti reali di grado dispari* ha almeno una radice *reale*.
- Le eventuali radici complesse di un polinomio *a coefficienti reali* sono a due a due complesse coniugate e quindi un polinomio *a coefficienti reali* si può scrivere come prodotto di un opportuno numero di polinomi *a coefficienti reali* di grado non superiore a 2.

In generale non è però facile trovare le n radici complesse di un polinomio di grado n. Si troveranno alcuni semplici esempi negli esercizi 14.10 e 14.11.

Nota Anche i numeri complessi hanno un "lato oscuro": non è possibile definire in $\mathbb{C}$ un ordinamento che sia compatibile con le operazioni di somma e prodotto, cioè non è possibile suddividere i numeri complessi non nulli in positivi e negativi in modo tale che il prodotto di due positivi comunque scelti sia positivo, come succede invece nei numeri reali.